PIRÂMIDE E CILINDRO

01. [B]
Se a soma das áreas das faces de um cubo de aresta a é $1014\ m^2$, então $6a^2 = 1014 \Rightarrow a = 13$ m.

Portanto, sendo a altura da pirâmide igual $\frac{13}{2}\ m$ e o apótema da base da pirâmide igual a $\frac{13}{2}\ m$, segue que o apótema da pirâmide mede $\frac{13}{2}\sqrt{2}$ m. Em consequência, a resposta é:

$$4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot \frac{13}{2}\sqrt{2} = 169\sqrt{2}\ m^2.$$

02. [B]
Se as arestas medem $6cm$, então o apótema da base mede $3cm$ e o apótema da pirâmide mede $3\sqrt{3}cm$. Portanto, pelo Teorema de Pitágoras, tem-se que a altura, h, da pirâmide é

$$h^2 = (3\sqrt{3})^2 - 3^2 \Rightarrow h = 3\sqrt{2}cm.$$

Em consequência, o volume da pirâmide é

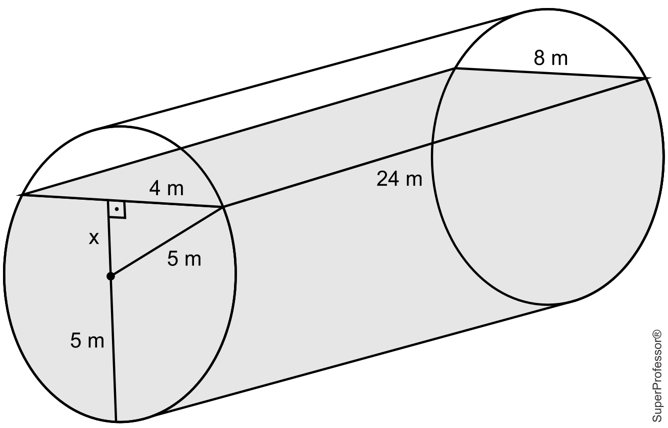
$$\frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 3\sqrt{2} \cong 50{,}76\ cm^3.$$

A resposta é $50{,}76 \cdot 2{,}5 \cong 127\ g$.

03.[E]
Largura da superfície para que a sua área seja 192 m^2:

$$\ell \cdot 24 = 192$$
$$\ell = 8\ m$$

Da figura abaixo, obtemos:



$$5^2 = x^2 + 4^2$$
$$x = 3\ m$$

Portanto, a altura do combustível deve ser de:

$$h = 5\ m + 3\ m = 8\ m$$

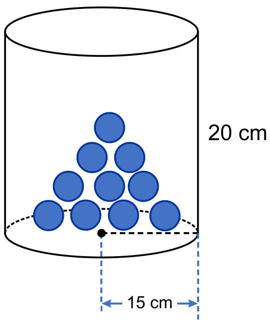
04. [D]
Admitindo que r seja o raio da base do cone e do cilindro, assim como h seja a altura do cone e também do cilindro, podemos escrever que:

$$V_{cone} = \frac{1}{3} \cdot V_{cilindro}$$
$$V_{cilindro} = 3 \cdot V_{cone}$$
$$V_{cilindro} = 3 \cdot 205$$
$$\boxed{V_{cilindro} = 615\ \text{mL}}$$

05. [C]
A medida do raio do cilindro é metade da medida da aresta da base do prisma. Logo:

$$\frac{V_{cilindro}}{V_{prisma}} = \frac{\pi \cdot 1^2 \cdot 8}{2^2 \cdot 8} = \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75 = 75\%$$

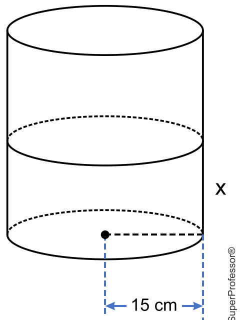
06. [B]
Considerando que:
V_A = volume inicial de água.
V_C = volume do cilindro.
V_E = volume de uma das esferas



Podemos escrever:

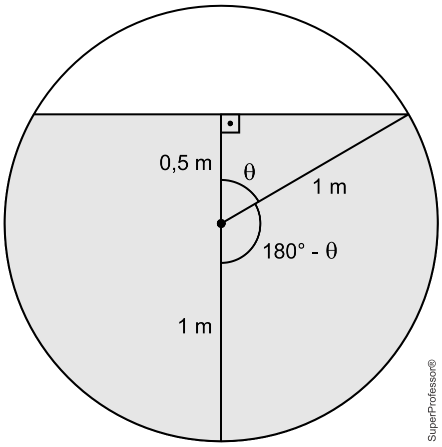
$$V_A + 10.V_E = V_C$$
$$V_A = V_C - 10 \cdot V_E$$
$$V_A = \pi \cdot 15^2 \cdot 20 - 10 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3^3$$
$$V_A = 4500\pi - 360\pi$$
$$\boxed{V_A = 4140\pi}$$

Altura da água, no recipiente, depois do derramamento de 10%.



$$4140\pi \cdot 0{,}9 = \pi \cdot 15^2 \cdot x$$
$$x = \frac{3726}{225}$$
$\boxed{x \simeq 16{,}6\ cm}$

07. [D]
Da figura abaixo, obtemos:



$$cos\,\theta = \frac{0{,}5}{1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60°$$

Logo, a área hachurada é dada por:
$$A = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 0{,}5 \cdot 1 \cdot sen\,60° + \frac{120°}{360°} \cdot \pi \cdot 1^2\right)$$
$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{2\pi}{3}\ m^2$$

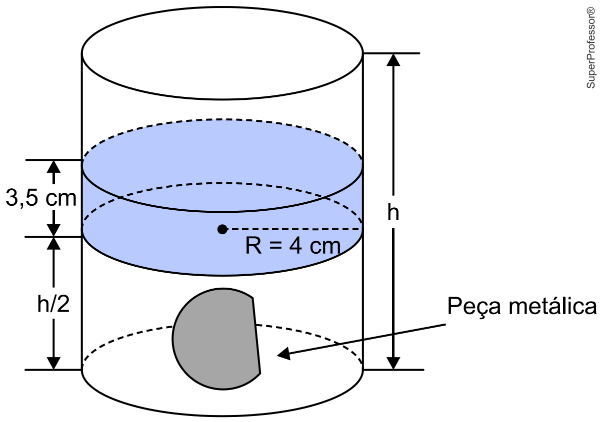
Portanto, o volume do óleo contido no tanque vale:
$$V = A \cdot h$$
$$V = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) \cdot h$$
$\therefore V = \frac{h}{12}\left(8\pi + 3\sqrt{3}\right)\ m^3$

08. [E]
Do volume do cilindro, obtemos:
$$\pi r^2 h = 12\pi \Rightarrow h = \frac{12}{r^2}$$

Sendo p o preço do material da tampa, o custo total do cilindro é dado por:
$$C = 2p(\pi r^2 + 2\pi r h) + p\pi r^2$$
$$C = 2p\pi r^2 + 4p\pi r \cdot \frac{12}{r^2} + p\pi r^2$$
$$C = 3p\pi r^2 + \frac{48p\pi}{r}$$

Para que o custo seja mínimo, devemos ter:
$$\frac{dC}{dr} = 6p\pi r - \frac{48p\pi}{r^2} = 0$$
$$6\boxed{p\pi}r = \frac{48\boxed{p\pi}}{r}$$
$$r^3 = 8$$
$\therefore r = 2$

09. [A]



O volume da peça metálica é igual ao volume de água deslocada (destacado na figura).
$V = \pi \cdot 4^2 \cdot 3{,}5 \Rightarrow \boxed{V = 56\pi\ cm^3}$

10. [C]
Vamos calcular, inicialmente, o volume do recipiente, obtemos:
$$V = \pi \cdot 5^2 \cdot 10$$
$$V = 3 \cdot 25 \cdot 10$$
$$V = 750\ cm^3 = 750\ mL$$

Considerando que $1\ L = 1000\ mL$ pode-se afirmar que a quantidade de alimento (em mL) que o senhor ingeriu antes de armazená-lo no recipiente foi de: $1000 - 750 = 250\ mL$

11. [A]
Seja x o aumento percentual no raio de cada cilindro. Logo, se o curso do pistão é o mesmo, então deve-se ter
$$3\pi(r(1+x))^2 = 4\pi r^2 \Rightarrow 3x^2 + 6x - 1 = 0$$
$$\Rightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3} - 1.$$

Aproximando $\sqrt{3}$ por 1,73, vem $\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1 \cong 15{,}3\%$ e, portanto, tal valor se encontra entre 15% e 18%.

12. [C]
Sejam a e ℓ, respectivamente, a medida da aresta do cubo e a medida da aresta do tetraedro. Logo, temos

$$\ell^2\sqrt{3} = 6a^2 \Rightarrow \frac{\ell^2}{a^2} = \frac{6}{\sqrt{3}}$$
$$\Rightarrow \frac{\ell}{a} = \sqrt{2\sqrt{3}}$$
$$\Rightarrow \frac{\ell}{a} = \sqrt{2}\sqrt[4]{3}.$$

13. [E]
O volume de titânio adquirido foi de

$$\frac{6}{10}\cdot\frac{4\pi}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{\pi}{10}\ m^3.$$

Portanto, se h é a altura do cilindro, então
$\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot h = \frac{\pi}{10} \Leftrightarrow h = \frac{4}{10}\ m = 40cm.$

14. [A]
O volume, V, da taça é dado por

$$V = \pi\cdot 5^2\cdot 36 \cong 3\cdot 25\cdot 36 \cong 2700\ cm^3.$$

Sejam m a massa total da taça, m_o a massa de ouro e m_ℓ a massa da liga. Logo, vem $m_o = \frac{3}{4}m$ e $m_\ell = \frac{1}{4}m$.

Ademais, sabendo que a densidade de um corpo é a razão entre a sua massa e o seu volume, temos

$$V_o = \frac{m_o}{19,3} = \frac{3m}{77,2}$$

e

$$V_\ell = \frac{m_\ell}{6,1} = \frac{m}{24,4}.$$

Portanto, segue de imediato que

$$\frac{3m}{77,2} + \frac{m}{24,4} = 2700 \Rightarrow m \cong 33816\ g \cong 34kg.$$

É claro que $30 < 34 < 35$.

15. [B]
De acordo com as informações do problema, podemos escrever que:

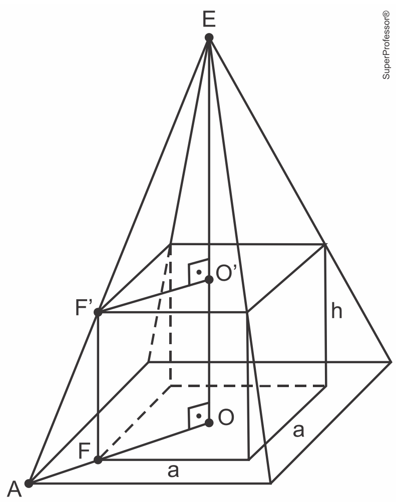
$$V_1 + V_2 = 3084\cdot\pi$$
$$3\cdot\pi\cdot r^2 + 12\cdot\pi\cdot R^2 = 3084\cdot\pi$$

Sabendo que $R = 8\cdot r$, podemos escrever que:

$$3\cdot\pi\cdot r^2 + 12\cdot\pi\cdot(8r)^2 = 3084\cdot\pi$$
$$771\cdot\pi\cdot r^2 = 3084\cdot\pi$$
$$r^2 = 4$$
$$r = 2\ m.$$

Portanto, o raio maior dado por:
$R = 8\cdot r \Rightarrow R = 8\cdot 2 \Rightarrow R = 16\ m$

16. [A]
Da figura abaixo, obtemos:



$$\overline{AO} = \frac{4\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2} = 4$$
$$\overline{EO} = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}$$
$$\overline{FO} = \overline{F'O'} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$
$$\overline{AF} = 4 - \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Por semelhança entre os triângulos AF’F e AEO, vem:

$$\frac{\overline{F'F}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{EO}}{\overline{AO}}$$
$$\frac{h}{4 - \frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{4}$$
$$h = 4\sqrt{3} - \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

Volume do prisma:

$$V = a^2h = a^2\left(4\sqrt{3} - \frac{a\sqrt{6}}{2}\right) = 4\sqrt{3}a^2 - \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$$

Para que tenhamos o volume máximo:

$$\left(4\sqrt{3}a^2 - \frac{a^3\sqrt{6}}{2}\right)' = 0$$
$$8\sqrt{3}a - \frac{3a^2\sqrt{6}}{2} = 0$$
$$a = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

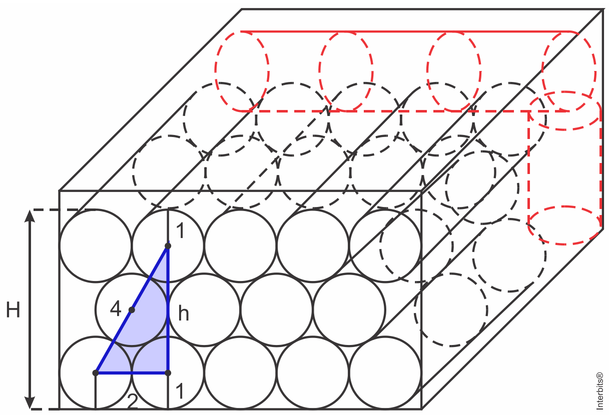
Logo:

$$V_{máx} = 4\sqrt{3}\cdot\left(\frac{8\sqrt{2}}{3}\right)^2 - \left(\frac{8\sqrt{2}}{3}\right)^3\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}$$
$$V_{máx} = 4\sqrt{3}\cdot\frac{128}{9} - \frac{1024\sqrt{2}}{27}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$V_{máx} = \frac{512\sqrt{3}}{9} - \frac{1024\sqrt{3}}{27}$$

$\therefore V_{máx} = \frac{512\sqrt{3}}{27}$

17. [C]
Observe a figura abaixo:

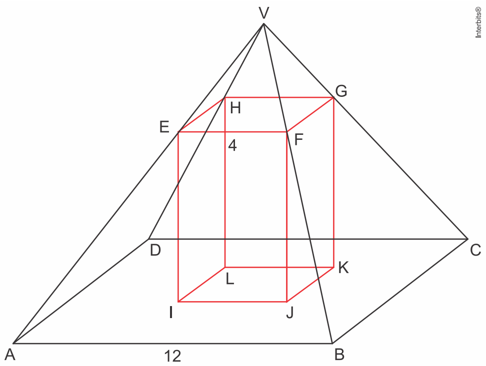


Onde:
$4^2 = 2^2 + h^2$
$h = \sqrt{16-4} = 2\sqrt{3}$
$H = h + 2 = 2\sqrt{3} + 2$
$H \cong 5{,}4\ \text{dm}$

Podemos então concluir que o número máximo de cilindros é de:
$N = 14 \cdot 2 + 5 + 3 = 36$

Logo:
$$V_{água} = V_{paralelepípedo} - NV_{cilindro}$$
$$V_{água} = 10 \cdot 8 \cdot 5{,}48 - 36 \cdot \underbrace{\pi}_{\cong 3{,}14} \cdot 1^2 \cdot 3$$
$$V_{água} \cong 438{,}4 - 339{,}12$$
$V_{água} \cong 99\ dm^3$

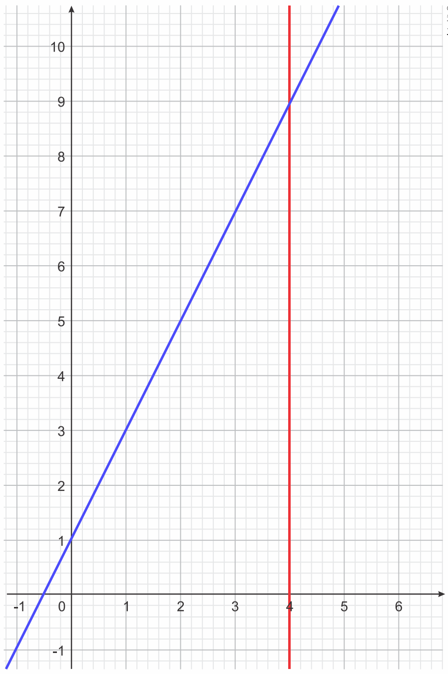
18. [A]



Calculando:

$$VEFGH \sim ABCD \Rightarrow razão\ semelhança \Rightarrow k = \frac{EF}{BA} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$
$$altura \Rightarrow \frac{15-h}{15} = \frac{1}{3} \Rightarrow 45 - 3h = 15 \Rightarrow h = 10$$
$$V_{peça} = \frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot 15 - 4 \cdot 4 \cdot 10 = 560\ cm^3$$

19. [A]
Graficamente:



Considerando um cilindro de revolução de altura igual a 9 e base de raio 4, e um cone de revolução de base idêntica e altura 8, pode-se calcular:

$$V_{sólido} = V_{cilindro} - V_{cone} = \pi \cdot 4^2 \cdot 9 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 8$$
$$V_{sólido} = 16\pi \cdot \left(9 - \frac{8}{3}\right) = \frac{304\pi}{3}$$

20. [B]
Considerando r o raio da base do cilindro, h a altura do cilindro e que a área lateral do cilindro é 64π, temos:
$2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 64 \cdot \pi \Rightarrow \pi \cdot h = 32$ (Equação 1).

Considerando, agora, que $2r$ é o raio da base do cone, $h-2$ sua altura e o volume é $128\pi\ cm^3$, podemos escrever que:
$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (2r)^2 \cdot (h-2) = 128 \cdot \pi \Rightarrow r^2 \cdot (h-2) = 96$ (Equação 2)

Das equações 1 e 2, temos:
$$r^2 \cdot (h-2) = 96 \Rightarrow r \cdot r \cdot h - 2 \cdot r^2 = 96 \Rightarrow$$
$$32r - 2r^2 = 96 \Rightarrow r^2 - 16r + 48 = 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau, obtemos $r = 12$ ou $r = 4$.
$r = 12 \Rightarrow h = \frac{32}{12}$ (não inteiro)
$r = 4 \Rightarrow h = \frac{32}{4} = 8$ (inteiro)

Calculando, agora, a geratriz do cone.

$$g^2 = (2r)^2 + (h-2)^2 \Rightarrow g^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow g = 10\ cm.$$

Logo sua área lateral será dada por:
$A_L = \pi \cdot 2r \cdot g = \pi \cdot 8 \cdot 10 = 80\pi cm^2$